

Programme de colles n°17

semaine du 5 au 9 février

Notions vues en cours

Chapitre 17 : Structures algébriques (*en complément des semaines précédentes*)

- Morphisme d'anneaux : définition, iso- / endo- / automorphisme
- L'ensemble des éléments inversibles d'un anneau $(A, +, \times)$ est un groupe pour la loi \times , notation A^\times
- Propriétés $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ et $(a^{-1})^{-1} = a$, un élément inversible est régulier
- Diviseur de zéro, anneau intègre, tout élément non nul d'un anneau intègre est régulier
- Corps, tout corps est un anneau intègre, (Hors-programme mais vu en cours :) définition et caractérisation de sous-corps

Chapitre 18 : Matrices

- Matrice de taille (n, p) , ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, coefficient d'indice (i, j) de A , on peut le noter A_{ij} ou $[A]_{ij}$
- Matrice ligne / colonne / carrée, ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, relation d'égalité dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
- Somme de matrice, $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +)$ est un groupe, matrice nulle $0_{n,p}$, multiplication d'une matrice par un scalaire
- Produit de matrices : c'est une application de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$, associativité et bilinéarité du produit
- Symbole de Kronecker δ_{ij} , matrice élémentaire E_{ij} , formule $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$
- Anneau $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$, matrice identité I_n , $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est non commutatif si $n \geq 2$
- Matrice scalaire, diagonale, notation $\text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, triangulaire (inférieure (stricte), supérieure (stricte))
- Notations $\mathcal{D}_n(\mathbb{K}), \mathcal{T}_n(\mathbb{K}), \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}), \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$, propriétés $\mathcal{T}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \cup \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ et $\mathcal{D}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \cap \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$
- Le produit de deux matrices diagonales / triangulaires inférieures / triangulaires supérieures est encore une matrice diagonale / triangulaire inférieure / triangulaire supérieure et les diagonales sont multipliées terme à terme
- Puissance k -ième de A avec $k \in \mathbb{Z}$, puissance k -ième d'une matrice diagonale, formules du binôme et $A^k - B^k$
- Matrice inversible, matrice inverse, notations A^{-1} et $GL_n(\mathbb{K})$, A est inversible ssi elle est inversible à gauche ssi elle est inversible à droite

Hors programme cette semaine : le calcul de matrice inverse en utilisant la méthode du pivot. La notion de matrice nilpotente n'est pas au programme : elle doit être rappelée dans les énoncés des exercices.

Questions de cours

Sauf mention contraire, les démonstrations sont à connaître.

- Définition de diviseur de zéro, d'anneau intègre. Montrer que tout élément non nul d'un anneau intègre est régulier Chapitre 17, Items 17.36 à 17.38
- Définition de corps. Montrer que tout corps est un anneau intègre. La réciproque est-elle vraie ? Énoncé uniquement : caractérisation d'un sous-corps Chapitre 17, Items 17.39, 17.40 et 17.42
- Associativité du produit matriciel Chapitre 18, Proposition 18.7